TENTAMEN GROEPENTHEORIE
5 JULI 2012, 9.00–12.00 UUR
Voor dit tentamen kan je 40 punten behalen. Je krijgt er alvast 4 kado.
Eindcijfer = aantal behaalde punten gedeeld door 4.
Geef bij al je antwoorden duidelijke argumenten.

(1) Het homomorfisme $\varphi : (\mathbb{Z}/42\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^*$ is gegeven door $\varphi(a \bmod 42) = a \bmod 21$.
  (a) [3 punten] Wat is de kern van φ?
  (b) [3 punten] Is φ bijectief?

(2) [4 punten] Geef een geheel getal n waarvoor de vermenigvuldiggroep $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ elementen bevat met orde 4 en ook elementen met orde 5, maar *geen* elementen met orde 3.

(3) We nemen de groep G bestaande uit alle reëele 2×2 matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$.
  (a) [4 punten] Bepaal het centrum van G.
  (b) [2 punten] Is G commutatief?

(4) (a) [3 punten] Bepaal τ^{2012}, voor $\tau = (1\,2\,3\,4)(2\,3\,4\,5)(4\,5\,6\,7) \in S_7$.
  (b) [3 punten] Bewijs: als $\sigma \in S_n$ oneven orde heeft, dan is $\sigma \in A_n$.

(5) [4 punten] Zoals je weet is D_n de symmetriegroep van een regelmatige n-hoek, en D_n wordt voortgebracht door een rotatie ρ die orde n heeft, plus een spiegeling σ, waarbij geldt $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$. Hoeveel elementen met orde 2 heeft de groep D_n?

(6) Gegeven is een groep G met een ondergroep H, waarbij $[G : H] < \infty$. Verder definiëren we een deelverzameling $N \subset G$ door

$$N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

  (a) [1 punt] Toon aan dat $N \subset H$.
  (b) [1 punt] Toon aan dat N een ondergroep is van G.
  (c) [2 punten] Toon aan dat N een normale ondergroep is van G.
  (d) [2 punten] Gebruik het homomorfisme van G naar de groep van bijecties op de verzameling $\{sH : s \in G\}$, gegeven door $g \in G$ af te beelden op de bijectie die sH naar gsH stuurt, om aan te tonen dat $[G : N]$ een deler is van $[G : H]!$.

(7) [4 punten] De ondergroep $H \subset \mathbb{Z}^4$ bestaat per definitie uit alle viertallen (a, b, c, d) die voldoen aan $8|(a - c)$ en $a + 2b + 3c + 4d = 0$.
Geef alle getallen die voorkomen als orde van elementen van $\mathbb{Z}^4/H$.